COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

Préambule

On tient à préciser qu'aucune démonstration faisant intervenir une convergence, une continuité, une dérivabilité sous le signe $\int$, $\left(\text{Resp. } \iint\right)$ ne sera prise en considération si les théorèmes invoqués ne sont pas énoncés avec précision au moins une fois dans la copie.

Notations

● On désigne respectivement par $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ le corps des réels, la droite réelle achevée, le corps des complexes. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ de sorte que si (x, y) est élément de $\mathbb{R}^2$ on pose :

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

● Dans tout le problème on considère un entier s $(s \geqslant 1)$; pour tout élément z de $\mathbb{C}$ et tout élément $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ de $\mathbb{C}^s$ on pose :

$$P_s(z, \lambda) = z^s + \lambda_1 z^{s-1} + \ldots + \lambda_s$$

et

$$P'_s(z, \lambda) = s z^{s-1} + \lambda_1 (s-1) z^{s-2} + \ldots + \lambda_{s-1}.$$

Pour λ dans $\mathbb{C}^s$, on note $(r_1, \ldots, r_s)$ *la suite des racines du polynôme* P_s, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=s} (z - r_j);$$

on note $Z = \{z_1, \ldots, z_k\}$ *l'ensemble de ses racines distinctes*, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=k} (z - z_j)^{s_j}$$

où l'entier s_j $(s_j \geqslant 1)$ représente l'ordre de multiplicité de z_j.

● Soient p un entier $(p \geqslant 1)$ et F une application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$, on dit que F est de classe C^r si et seulement si F est r fois continûment différentiable *en tant qu'application de* $\mathbb{R}^{2p}$ *dans* $\mathbb{C}$; on dit que F est de classe C^∞ si et seulement si elle est de classe C^r pour tout r.

● Les opérateurs différentiels $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ sont notés respectivement $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Pour p et q entiers naturels on pose :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \, \partial \bar{z}^q} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^p \circ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^q.$$

Définitions

Soit F une application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$ supposée de classe C^∞; soit a un point de $\mathbb{C}^p$, soit r un entier $(r \geqslant 0)$; on dit que F est r-plate au point a si et seulement si F s'annule en a ainsi que toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre r inclus. On dit que F est plate en a si et seulement si, pour tout entier r, F est r-plate en a.

Soit X une partie de $\mathbb{C}^p$, on dit que F est r-plate (Resp. plate) sur X si et seulement si F est r-plate (Resp. plate) en chaque point de X.

Dans tout le problème f est une application de classe C^∞ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et g une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

L'objet du problème est d'établir une identité de division de f, (Resp. g) par le polynôme $P_s(z, \lambda)$, (Resp. $P_s(x, \lambda)$) et d'étudier comment le quotient et le reste définis à cette occasion dépendent de λ.

On note Δ l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial\lambda^{\alpha}\partial\bar{\lambda}^{\beta}\partial\eta^{\gamma}}$

où $\partial\lambda^{\alpha}$ (Resp : $\partial\bar{\lambda}^{\beta}$) est mis pour

$$\partial\lambda_1^{\alpha_1}\ \dots\ \partial\lambda_s^{\alpha_s} \qquad \left(\text{Resp : } \partial\bar{\lambda}_1^{\beta_1}\ \dots\ \partial\bar{\lambda}_s^{\beta_s}\right)$$

En posant $Q(x,\eta,\lambda) = \left|\dfrac{P'_s(x+\eta i,\lambda)}{P_s(x+\eta i,\lambda)}\right|^2$

démontrer que :

a. On a : pour tout (η,λ) dans Ω et tout x réel :

$$\Delta\, Q(x,\eta,\lambda) = \frac{A(x,\eta,\lambda)}{|P_s(x+\eta i,\lambda)|^{2p}}$$

où A est un polynôme en x, η, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_s$ dont le degré en x est au plus $2ps-2$.

b. L'application σ est de classe C^∞ sur Ω.

c. Pour tout compact K de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^s$ et tout triplet (α,β,γ), il existe un réel C_K tel que :

$$\forall(\eta,\lambda)\in\Omega\cap K \qquad |\Delta\sigma(\eta,\lambda)| \leqslant C_K\left(1+\frac{1}{\delta(\eta,\lambda)^{2ps}}\right)$$

Deuxième partie

Sauf au 4°, on a fixé λ dans $\mathbb{C}^s$ et on écrit $P(z)$ au lieu de $P_s(z,\lambda)$.

1° *a.* Soit s_0 un entier ($s_0 \geqslant 1$); en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer qu'il existe une unique application de classe C^∞, notée Q_0, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et un unique polynôme R_0 de degré au plus s_0-1, tels que :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad g(t) = R_0(t) + t^{s_0}\,Q_0(t)$$

b. Démontrer qu'il existe une application de classe C^∞ notée Q, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et un polynôme R de degré au plus $s-1$ tels que :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad g(t) = P(t)\,Q(t) + R(t)$$

Démontrer que le couple (Q, R) est unique si et seulement si P a toutes ses racines réelles.

2° Soient m et n deux entiers ($m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$), démontrer que l'application $w : \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \qquad w(z) = \frac{\bar{z}^{n+m}}{z^n}$$

se prolonge de manière unique en une application $w_0 : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ de classe C^{m-1}.

3° *a.* En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle, démontrer l'égalité :

$\forall z\in\mathbb{C} \quad \forall h\in\mathbb{C}$

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{1\leqslant p+q\leqslant r} \frac{h^p\,\bar{h}^q}{p!\,q!}\,\frac{\partial^{p+q}f}{\partial z^p\,\partial\bar{z}^q}(z) + (r+1)\sum_{p+q=r+1}\frac{h^p\,\bar{h}^q}{p!\,q!}\,E_{p,q}(z,h)$$

où $\qquad E_{p,q}(z,h) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^r\,\frac{\partial^{r+1}f}{\partial z^p\,\partial\bar{z}^q}(z+th)\,dt$

b. On suppose l'application $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}$ plate sur l'ensemble Z des zéros de P.

Démontrer qu'il existe une unique application de classe C^∞, notée Q, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et un unique polynôme R de degré au plus $s-1$ tels que :

$$\forall z\in\mathbb{C} \qquad f(z) = P(z)\,Q(z) + R(z)$$

c. Démontrer que si f est holomorphe, Q l'est aussi.

d. Démontrer que le résultat de *b.* subsiste si l'on suppose seulement que $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}$ est, pour tout j $\quad(1\leqslant j\leqslant k)\quad(s_j-1)$ - plate au point z_j.

4° Soit F une application de classe C^∞, de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$; on suppose F plate sur l'ensemble X des couples (z, λ) vérifiant $P_s(z, \lambda) = 0$.

Démontrer que pour tout entier naturel r $(r \geqslant 1)$ l'application :

$$(z, \lambda) \longmapsto \frac{F(z, \lambda)}{(P_s(z, \lambda))^r}$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \setminus X$ dans $\mathbb{C}$ se prolonge de façon unique en une application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞.

Indication : on commencera par démontrer que l'application :

$$\Phi : (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \longmapsto (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}, P_s(z, \lambda))$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans lui-même est un changement de variable C^∞, c'est-à-dire une application bijective de classe C^∞ ainsi que sa réciproque.

Troisième partie

Pour tout réel ξ on note : $I(\xi) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+|\xi|}, \frac{1}{1+|\xi|}\right]$

et A la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ formée par les triplets (ξ, λ, y) tels que y appartienne à $I(\xi)$.

On note ρ_0 une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire, et vérifiant :

$$\forall t \in [8s^3, +\infty] \qquad \rho_0(t) = 0$$

$$\forall t \in [0, 4s^3] \qquad \rho_0(t) = 1$$

L'existence de ρ_0 est admise.

1° *a*. Démontrer que l'application :

$$(\xi, \lambda, \eta) \longmapsto \rho_0\left(\frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1+|\xi|}\right)$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ est de classe C^∞ en (λ, η) et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, η).

b. Soit Ψ l'application de A dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in A \quad \Psi(\xi, \lambda, y) = 4(1+|\xi|) \int_y^{\frac{1}{1+|\xi|}} \rho_0\left(\frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1+|\xi|}\right) d\eta.$$

Démontrer que pour tout λ dans $\mathbb{C}^s$ et tout réel ξ on a :

$$\Psi\left(\xi, \lambda, \frac{1}{2(1+|\xi|)}\right) \geqslant 1.$$

Prouver que Ψ est continue, qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathring{A}$ en (λ, y), et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, y) sur $\mathring{A}$.

2° Soit α un réel, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; soit ρ_1 une application de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$ de classe C^∞, vérifiant :

$$\forall t \in [0, \alpha] \qquad \rho_1(t) = 0$$

$$\forall t \in [1-\alpha, +\infty[\qquad \rho_1(t) = 1$$

L'existence de ρ_1 est admise.

On note ρ l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$(\xi, \lambda, y) \longmapsto \rho(\xi, \lambda, y)$ avec :

i. ρ est paire en y

ii. si $0 \leqslant y < \frac{1}{2(1+|\xi|)}$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = 1$

iii. si $y \in I(\xi)$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = \rho_1(\Psi(\xi, \lambda, y))$

iv. si $y > \frac{1}{1+|\xi|}$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = 0$

a. Prouver que ρ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$, de classe C^∞ par rapport à (λ, y), chacune de ses différentielles étant continue par rapport à (ξ, λ, y) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$.

b. Prouver l'existence d'un ouvert contenant $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \{0\}$ sur lequel ρ est constante égale à 1.

Prouver que $\rho(\xi, \lambda, y)$ est nul dès que $|y\,\xi| \geqslant 1$.

c. Démontrer l'existence d'un ouvert contenant l'ensemble :

$$\{ (\xi, \lambda, y) \mid \xi \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}^s,\ y \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ (y, \lambda) \notin \Omega \}$$

sur lequel $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ est nulle.

d. Démontrer que pour tout compact K de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ et tout triplet (α, β, γ) de $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}$, il existe un réel D_K et un entier naturel q tels que :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in \mathbb{R} \times K \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha| + |\beta| + \gamma} \rho}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial y^\gamma} (\xi, \lambda, y) \right| \leqslant D_K (1 + |\xi|^q)$$

Quatrième partie

On suppose dans cette partie que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^∞ et est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On admet l'existence d'une fonction $\hat{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x \longmapsto |x^n \hat{g}(x)| \ \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi)\, d\xi.$$

On définit alors F de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \qquad F(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, \lambda, y)\, e^{iz\xi} \hat{g}(\xi)\, d\xi$$

où l'on a posé $z = x + iy$; et où ρ est l'application définie à III, 2°.

1° Démontrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \qquad g(x) = F(x, \lambda).$$

2° Démontrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ est plate en tout point (z, λ) tel que $z \in \mathbb{R}$ ou $P_s(z, \lambda) = 0$.

3° Soit D le disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre ω et de rayon R $(R > 0)$; démontrer que :

$\forall t \in \mathbb{R} \cap \mathring{D},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}^s$

$$F(t, \lambda) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\omega + Re^{i\theta}, \lambda)}{\omega + Re^{i\theta} - t} e^{i\theta}\, d\theta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} (z, \lambda) \frac{dx\, dy}{z - t}$$

4° Prouver l'existence de polynômes $R_j(u, \lambda)$ tels que l'on ait l'identité de fractions rationnelles :

$$\frac{1}{u - z} = \frac{P_s(z, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} \frac{1}{u - z} + \sum_{j=1}^{j=s} \frac{R_{j-1}(u, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} z^{s-j}$$

et démontrer l'existence d'une fonction $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, et d'un polynôme en t

$$R(t, \lambda) = a_1(\lambda)\, t^{s-1} + \ldots + a_s(\lambda)$$

de classe C^∞ en (t, λ) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \qquad g(t) = P_s(t, \lambda)\, Q(t, \lambda) + R(t, \lambda).$$